

Warum haben meine Netzwerk-Freunde mehr Freunde als ich?

Da du in diesem Vortrag einige Rechnungen und Tabellen zeigen musst, nutze eine Präsentation. Wenn dies nicht möglich ist, kannst du die wichtigsten Angaben und Formeln an die Tafel schreiben. Am besten bereitest du dies vor dem Vortrag vor.

Habt ihr das Gefühl, dass eure Freunde ihrerseits mehr Freunde im Online-Netzwerk haben als ihr selbst? Dann freut euch auf meinen Vortrag, denn ich zeige euch jetzt, dass das nicht an euch liegt, sondern an der Mathematik. Und mit ihrer Hilfe werde ich nun die Frage beantworten:

Warum haben meine Netzwerk-Freunde mehr Freunde als ich?

In den sozialen Netzwerken tummeln sich viele Millionen Mitglieder. Für meinen Vortrag habe ich mir jedoch ein Netzwerk mit nur 11 Mitgliedern ausgedacht, das ich **Follownet** nenne.

Anzahl Mitglieder	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Anzahl Freunde	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Bei 11 Mitgliedern lässt sich für jeden Einzelnen angeben, wie viele Freunde er hat. Nehmen wir als Erstes die Verteilung an, die ich in der Tabelle zeige: Es soll jeweils 1 Mitglied 0, 1, 2, 3, ..., 10 Freunde haben. Im Mittel hat dann jeder 5 Freunde. Dabei kann jedes Follownet-Mitglied maximal 10 Freunde haben (man ist ja nicht mit sich selbst befreundet) und minimal 0 Freunde.

Wenn jedes Mitglied im Mittel 5 Freunde hat, wieso haben diese 5 Freunde ihrerseits wahrscheinlich mehr als 5 Freunde?

Jemand mit 10 Freunden ist mit allen Mitgliedern von Follownet befreundet. Er hat logischerweise keine Freunde, die mehr Freunde haben als er. Jemand mit 0 Freunden hat nicht nur keinen Freund, er würde auch im ganzen Follownet niemanden mit weniger Freunden finden. Der Mittelwert von 5 Freunden liegt genau in der Mitte zwischen der Maximalzahl Freunde (10) und der Minimalzahl (0). Man könnte daher vermuten, dass jemand mit 5 Freunden genauso viele Freunde hat, die mehr Freunde haben als er selbst, wie auch Freunde, die weniger Freunde haben als er. Aber so einfach wäre es nur, wenn es für alle Mitglieder von Follownet gleich wahrscheinlich wäre, zum Freundeskreis eines bestimmten Mitglieds zu gehören. Das ist aber nicht der Fall.

► Du kannst diesen Vortrag beginnen, indem du eine Umfrage bei deinem Publikum machst, wer wie viele Freunde in seinem sozialen Netzwerk hat.

► Überlege dir, welches soziale Netzwerk ihr in eurer Klasse am häufigsten nutzt, und passe den Titel deines Vortrags entsprechend an. Recherchiere die Mitgliederzahlen im Internet und nenne im Vortrag die konkreten Zahlen.

► Um den Mittelwert zu berechnen, dividiere die Gesamtzahl der Freunde aller Mitglieder durch die Anzahl der Mitglieder.

► Zeige die Tabellen auf einer Folie. Im Notfall kannst du kleine Tabellen auch an die Tafel schreiben. Dies solltest du jedoch vor dem Vortrag machen.

Nennen wir ein Mitglied mit 1 Freund M1, M9 ist ein Mitglied mit 9 Freunden, M5 eines mit 5 Freunden usw.

M1 ist nicht mit sich selbst befreundet, es bleiben also 10 mögliche Freunde. Für jedes Follownet-Mitglied beträgt die Wahrscheinlichkeit, zum Freundeskreis von M1 zu gehören, $1/10$ oder 10 %. Die Wahrscheinlichkeit für die anderen Mitglieder, mit M10 befreundet zu sein, ist $10/10$, also 100 % – was klar ist, denn wenn M10 zehn Freunde hat, ist er mit dem ganzen Netzwerk befreundet.

Vergleichen wir die Zahlen, sehen wir: **Die Wahrscheinlichkeit, mit jemandem befreundet zu sein, der viele Freunde hat, ist höher als die, mit jemandem befreundet zu sein, der nur wenige Freunde hat.** Umgekehrt heißt es, dass jemand, der viele Freunde hat, dann auch eher zu deinem Freundeskreis gehört.

► **Bereite eine Folie vor, auf der du die wichtigsten Angaben zusammenträgst und auch eine Schlussfolgerung präsentierst.**

Kann man diese Aussage mit ein paar Zahlen anschaulicher machen?

Dazu müssen wir das Problem vereinfachen, damit wir es berechnen können.

Als Beispiel betrachten wir das Mitglied, das genau 5 Freunde hat (M5). Dann gibt es jeweils 5 Mitglieder mit weniger und 5 Mitglieder mit mehr Freunden. Wir vereinfachen nun die Zusammensetzung des Netzwerks: Die beiden Gruppen mit mehr und weniger Freunden sollen jeweils alle gleich viele Freunde haben, dabei soll der Mittelwert unverändert 5 bleiben. Damit haben wir diese Möglichkeiten:

- 1) 5 Mitglieder haben 4 Freunde, 5 Mitglieder haben 6 Freunde.
- 2) 5 Mitglieder haben 3 Freunde, 5 Mitglieder haben 7 Freunde.
- 3) 5 Mitglieder haben 2 Freunde, 5 Mitglieder haben 8 Freunde.
- 4) 5 Mitglieder haben 1 Freund, 5 Mitglieder haben 9 Freunde.

► **Zeige diese 4 Möglichkeiten auf einer Folie.**

Wir beginnen mit der 4. Möglichkeit. Die 5 Freunde von M5 stammen entweder aus der Gruppe M1 oder aus der Gruppe M9. Die Wahrscheinlichkeit, mit einem Mitglied M9 befreundet zu sein, beträgt $9/10$, also 90 % oder 0,9. Die Wahrscheinlichkeit für eine Freundschaft mit einem Mitglied M1 beträgt dagegen nur 10 % oder 0,1.

Wählt man blind einen der Freunde von M5 aus, ist dieser Freund also mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,9 aus der Gruppe M9.

► **Um den Mittelwert bspw. zur 4. Möglichkeit zu berechnen, gehe so vor: 1 Mitglied hat 5 Freunde, 5 haben je 1 Freund und 5 haben je 9 Freunde, das ergibt in der Summe 55 Freunde. Dies dividiere nun durch die Anzahl Mitglieder (11). Du erhältst als Mittelwert wieder 5.**

Gibt es ein Standardproblem, durch das wir dieses Problem annähern können?

Die Freunde von M5 gehören entweder zu M9 oder zu M1, es gibt also zwei Möglichkeiten. Ein Zufallsexperiment mit zwei möglichen Ausgängen heißt **Bernoulli-Experiment**. Führt man mehrere Bernoulli-Experimente hintereinander durch, ist dies eine Bernoulli-Kette. Wichtig bei der **Bernoulli-Kette** ist, dass sich die Wahrscheinlichkeiten von Experi-

ment zu Experiment nicht ändern dürfen. Wir müssen also überlegen, ob dies der Fall ist. Wenn wir das erste Experiment durchgeführt haben, also den ersten Freund untersucht haben, gibt es noch 4 Freunde von M5, deren Zugehörigkeit wir nicht kennen. Auch diese Freunde stammen jeder entweder mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,9 aus der Gruppe M9 oder mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,1 aus der Gruppe M1. Die Wahrscheinlichkeiten für die Gruppenzugehörigkeit bleiben also gleich, wenn wir nacheinander die Freunde von M5 blind auswählen. Damit können wir unser Problem durch eine Bernoulli-Kette annähern.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, in einer n-stufigen Bernoulli-Kette genau k Erfolge zu haben, also k-mal das gewünschte Ergebnis zu erhalten, kann man berechnen mit:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

$\binom{n}{k}$ ist ein sogenannter Binomialkoeffizient, dessen Werte man für kleine

Werte von k und n in Tafelwerken nachschlagen kann. Nennen wir es einen Erfolg, wenn ein zufällig ausgewählter Freund von M5 aus der Gruppe M9 stammt, ist die **Erfolgswahrscheinlichkeit $p = 0,9$** .

Ein Misserfolg ist es dann, wenn der zufällig ausgewählte Freund aus der Gruppe M1 stammt. Entsprechend ist die **Misserfolgswahrscheinlichkeit $q = 0,1$** .

Die Summe aus p und q muss 1 ergeben, was der Fall ist:

$$p + q = 0,9 + 0,1 = 1.$$

Wir wählen nacheinander die 5 Freunde von M5 aus, unsere Bernoulli-Kette hat also: **n = 5 Stufen**.

In diesen 5 Stufen erwischen wir k-mal einen Freund aus der Gruppe M9, haben also **k Erfolge**. Im nächsten Schritt müssen wir also überlegen:

Wie groß müssen wir k wählen?

Wir möchten berechnen, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass mehr als die Hälfte der Freunde von M5 ihrerseits mehr als 5 Freunde haben. Dazu müssen mindestens 3 der 5 Freunde zu M9 gehören. Die Anzahl Erfolge muss also mindestens 3 sein, d.h.: **$k \geq 3$** .

Wie sollte unser Ergebnis aussehen?

Wenn es wahrscheinlicher ist, dass mehr als die Hälfte der Freunde ihrerseits mehr als 5 Freunde haben, **muss diese Wahrscheinlichkeit größer als 0,5 oder 50 % sein**.

► Schreibe auch hier wieder die wichtigsten Angaben auf eine Folie. Wichtig ist es vor allem, die Formel aufzuschreiben und Schritt für Schritt vorzulesen.

$\binom{n}{k}$ liest du: „n über k“.

Wir berechnen daher die Wahrscheinlichkeiten für $k = 3$, $k = 4$ und $k = 5$ und addieren diese:

$$\begin{aligned} P(X \geq 3) &= P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) \\ &= \binom{5}{3} \cdot 0,9^3 \cdot 0,1^2 + \binom{5}{4} \cdot 0,9^4 \cdot 0,1^1 + \binom{5}{5} \cdot 0,9^5 \cdot 0,1^0 \\ &= 10 \cdot 0,729 \cdot 0,01 + 5 \cdot 0,656 \cdot 0,1 + 1 \cdot 0,590 \cdot 1 = 0,991 \approx 99 \% \end{aligned}$$

► Zeige die Rechnungen auf einer Folie und erkläre sie Schritt für Schritt.

Die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als die Hälfte der Freunde von M5 mehr Freunde hat als er selbst, ist ungefähr 99 %.

Ganz analog berechnen wir für die anderen 3 Möglichkeiten, die wir für die Anzahl Freunde der Mitglieder angenommen haben, mit welcher Wahrscheinlichkeit mindestens 3 der 5 Freunde ihrerseits mehr als 5 Freunde haben:

- 1) (5×4 Freunde, 5×6 Freunde):
- 2) (5×3 Freunde, 5×7 Freunde):
- 3) (5×2 Freunde, 5×8 Freunde):
- 4) (5×1 Freund, 5×9 Freunde):

► Zeige eine Folie, auf der du die 4 Möglichkeiten noch einmal auflistest und die Wahrscheinlichkeiten dazu. Rechne diese vorher aus und präsentiere hier nur noch die Ergebnisse.

In allen 4 Fällen ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 3 der Freunde mehr als 5 Freunde haben, größer als 0,5. Am geringsten ist sie in Fall 1, am höchsten in Fall 4. Der Grund ist, dass in Fall 1 die Erfolgswahrscheinlichkeit p am geringsten ist, in Fall 4 am höchsten. Die Wahrscheinlichkeit, mit einem M6 befreundet zu sein, beträgt nur $6/10$, damit ist $p = 0,6$.

Dies ist eine sehr grobe Näherung, aber ich denke, ich konnte euch zeigen, dass aus mathematischen Gründen fast zwangsläufig die meisten eurer Freunde mehr Freunde haben als ihr. Tröstet euch damit, dass es denen genauso geht – statistisch betrachtet jedenfalls.

Autorin: Dr. Wiebke Salzmänn

© Duden 2021
Bibliographisches Institut GmbH
Mecklenburgische Straße 53, 14197 Berlin

ISBN des zugehörigen Buchs: 978-3-411-71045-4
www.duden.de