Pythagoras – wozu brauchen wir ihn?

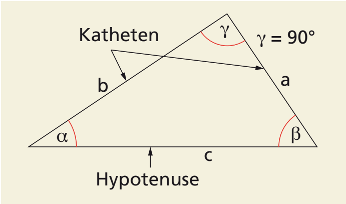
Dieses Referat kannst du als Vortrag halten. Stelle Bilder zusammen, um deine Anwendungen des Pythagoras anschaulich zu machen. Richte zu Beginn eine Frage an dein Publikum, die sich auf die erste deiner Anwendungen bezieht. Zu den hier gewählten Beispielen könntest du z. B. fragen, wie man prüfen kann, ob eine Ecke rechtwinklig ist.

Wenn die richtige Antwort zu lange auf sich warten lässt, gib sie selbst, sonst verlierst du zu viel Zeit.

Paul hat ein uraltes Fachwerkhaus gekauft. Nun zweifelt er, ob der neue Schreibtisch in die vorgesehene Ecke passt – diese sieht nach all den Jahrhunderten nicht mehr besonders rechtwinklig aus. Wie könnte er die Rechtwinkligkeit prüfen?
Diese Frage soll unter anderem in diesem Vortrag beantwortet werden, in dem es um das Thema geht:

Pythagoras – wozu brauchen wir ihn?

Mit „Pythagoras“ ist natürlich der **Satz des Pythagoras** gemeint. Das ist einer der bekanntesten Sätze aus der Mathematik, genauer gesagt aus der Geometrie. Beim Satz des Pythagoras geht es um **Dreiecke,** und zwar speziell um rechtwinklige Dreiecke.
Wie der Name schon sagt, hat ein rechtwinkliges Dreieck einen 90°-Winkel. Da die Summe aller Winkel im Dreieck nicht größer werden kann als 180°, sind die beiden anderen Winkel kleiner als 90°. Für die Seiten im rechtwinkligen Dreieck gibt es spezielle Bezeichnungen:
Die **Hypotenuse** liegt dem rechten Winkel gegenüber, die beiden **Katheten** schließen den rechten Winkel ein.
In der Abbildung sind die Katheten mit a und b und die Hypotenuse mit c bezeichnet, γ ist der rechte Winkel.



Zeige alle Abbildungen auf Folien oder zeichne sie vor deinem Vortrag an die Tafel. Wichtig ist, dass du deinem Publikum mit einem Zeigestock oder Laserpointer jeweils verdeutlichst, worüber du gerade sprichst.

Der Satz des Pythagoras sagt nun, dass das Quadrat der Länge der Hypotenuse so groß ist wie die Summe der Quadrate der Kathetenlängen – in diesem Dreieck gilt daher die Formel:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Es gibt drei Unbekannte a, b und c – wenn man zwei davon kennt, kann man die dritte berechnen. Die Seiten in Dreiecken zu berechnen, das klingt ziemlich theoretisch.
Eine praktische Anwendung wäre, zu prüfen, ob eine Ecke rechtwinklig ist.

Zeige auch wichtige Formeln auf einer Folie oder schreibe sie an die Tafel.

Wie prüft man, ob eine Ecke rechtwinklig ist?

Wenn eine Zimmerecke rechtwinklig ist, sind die Wände die Katheten. Um die Werte für a und b zu bestimmen, könnte man die Länge der Wände messen. Man kann auch an jeder Wand von der Ecke ausgehend 1 m abmessen und eine Markierung anbringen. Das hat den Vorteil, dass „1" eine kleine Zahl ist, mit der sich gut rechnen lässt. Paul entscheidet sich für diese Methode und misst die Entfernung zwischen den Markierungen diagonal über den Fußboden hinweg. Er erhält eine Länge von 1,43 m.
Da dies die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks sein soll, muss die Länge mit der übereinstimmen, die man mithilfe des Satzes von Pythagoras berechnet. Paul setzt die Kathetenlängen in die Formel ein:

$$c^2 = 1^2\ \text{m}^2 + 1^2\ \text{m}^2 = 1\ \text{m}^2 + 1\ \text{m}^2 = 2\ \text{m}^2.$$

Die Länge der Diagonale ergibt sich durch Wurzelziehen zu

$$c = \sqrt{2}\ \text{m} \approx 1{,}41\ \text{m}.$$

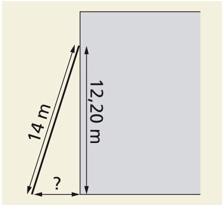
Die gemessene Diagonale ist also geringfügig länger als die berechnete, der Winkel ist etwas größer als 90°. Paul beschließt, dass ein etwas zu großer Winkel kein Problem ist, dort passt der Schreibtisch trotzdem hinein.
Wenn Paul ohne Taschenrechner arbeiten möchte, kann er auch ein **pythagoreisches Tripel** nehmen – das sind drei ganze Zahlen, die den Satz des Pythagoras erfüllen. Das kleinste dieser Tripel ist 3, 4, 5, denn: $5^2 = 4^2 + 3^2$. Wenn Paul an der einen Wand 4 m abmisst, an der anderen 3 m, muss die Verbindung der Markierungen 5 m lang sein.

Wenn du etwas vorrechnen möchtest, kannst du das direkt an der Tafel machen – bedenke aber, dass dies bei langen Rechnungen Zeit kostet, die du einplanen musst. Deine Zuhörer können aber gut folgen, wenn du eine Rechnung Schritt für Schritt entwickelst.

Da Pauls altes Haus ein Fachwerkhaus mit viel Holz ist, interessiert Paul sich für die Ausstattung der örtlichen freiwilligen Feuerwehr. Diese verfügt über eine dreiteilige Schiebeleiter. Er geht zum Tag der offenen Tür bei der Feuerwehr und erfährt, dass diese Feuerwehrleitern nach Norm 14 m lang sind. Damit erreicht man eine Höhe von maximal 12,20 m und kann Personen aus dem 3. Stock retten. Paul ist erleichtert, denn mit Dachgeschoss hat sein Haus nur drei Stockwerke. Als er nach Hause kommt, fällt ihm auf, dass rund um das Haus diverse Mauern, Hecken und Gartenkunst angeordnet sind. Haben die Feuerwehrleute im Ernstfall überhaupt Platz, um die Leiter aufzustellen?

Wie weit steht der Fuß der Schiebeleiter vom Haus entfernt?

Wenn die Leiter am Haus lehnt, ist ihre Länge die Hypotenuse, die Rettungshöhe von 12,20 m ist die eine Kathete. Die andere Kathete ist die Entfernung des Leiterfußes vom Haus – diese möchte Paul berechnen. Dazu löst er den Satz des Pythagoras nach einer Kathete auf (er wählt a) und setzt die Zahlenwerte für die Hypotenuse c und die andere Kathete b ein:



Zeige die Skizze und die Rechnung auf einer Folie.

$$a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{(14\ \text{m})^2 - (12{,}2\ \text{m})^2} \approx 6{,}9\ \text{m}$$

Denke daran, dass du hier mit Größen rechnest – die Einheiten gehören dazu und müssen mit quadriert werden!

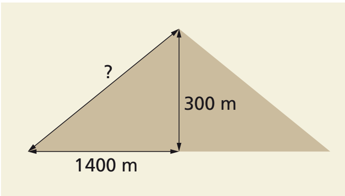
Paul stellt fest, dass er unter den Fenstern (denn durch diese müsste er das Haus über die Leiter verlassen) bis zum Abstand von knapp 7 m freie Flächen schaffen muss.

Nachdem Paul alle Rettungswege frei geräumt hat, möchte er sich mit einem Eis belohnen und in ein Eiscafé gehen, das Max ihm empfohlen hat. Mit einem Blick auf den Stadtplan stellt Paul fest, dass das Café nur 1,4 km entfernt ist. Dann sieht er jedoch, dass das Eiscafé auf einem 300 m hohen Hügel liegt. Der Stadtplan zeigt nur die horizontale Entfernung.

Wie weit muss Paul tatsächlich laufen?

Um die tatsächliche Entfernung den Hang hinauf zu berechnen, benutzt Paul wieder den Satz des Pythagoras.
Die horizontale Entfernung ist die eine Kathete:

$$a = 1{,}4\ \text{km} = 1400\ \text{m}.$$



Die Höhe des Hügels ist die andere Kathete:

$$b = 300\ \text{m}.$$

Die tatsächliche Weglänge ist dann die Hypotenuse:

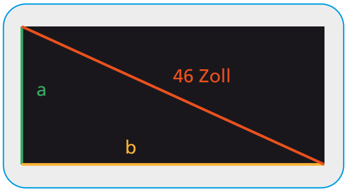
$$c = \sqrt{(1400\ \text{m})^2 + (300\ \text{m})^2} \approx 1432\ \text{m}.$$

Der Weg ist nur 32 m länger. Paul nimmt trotzdem die Zahnradbahn, es ist ihm zu steil.

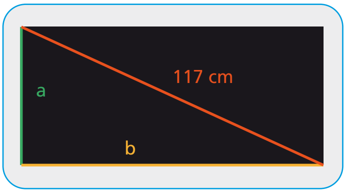
Als Paul abends wieder zu Hause ist, freut er sich auf einen faulen Fernsehabend. Vorher muss er aber noch seinen Fernseher aufstellen. Aber passt der auch an die vorgesehene Wand? Dort ist in der Breite 1 m Platz. Paul hat ein Gerät mit einer Bildschirmdiagonale von 46 Zoll. Außerdem weiß er, dass sein Fernseher ein Seitenverhältnis von 16 : 9 hat.

Wie breit ist Pauls Fernseher?

Paul ist zu faul, sein Maßband zu suchen, also nimmt er wieder den Satz des Pythagoras zu Hilfe. Da der Bildschirm rechte Winkel in den Ecken hat, kann Paul die Diagonale als Hypotenuse nehmen und Breite und Höhe als Katheten.



Allerdings stößt er auf ein paar Probleme. Zuerst muss er ausrechnen, wie viel Zentimeter 46 Zoll entsprechen. Er weiß noch, dass 1 Zoll etwa 2,54 cm sind:

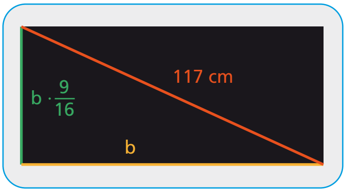


$$c = 46 \text{ Zoll} \approx 46 \cdot 2{,}54 \text{ cm} \approx 116{,}8 \text{ cm} \approx 117 \text{ cm}.$$

Das zweite Problem macht ihm mehr Kopfzerbrechen – er kennt die Hypotenuse und möchte eine Kathete berechnen. Aber die zweite Kathete kennt er auch nicht! Nach einigem Überlegen fällt ihm jedoch ein, dass er das Seitenverhältnis kennt, dieses beträgt 16 : 9. Die Breite b verhält sich also zur Höhe a wie 16 : 9:

$$\frac{b}{a} = \frac{16}{9}$$

Wenn er diese Gleichung nach a auflöst, erhält er eine Formel für a, in der b als Variable vorkommt.



$$a = \frac{9}{16} \cdot b$$

Wenn er nun im Satz des Pythagoras a durch diese Formel ersetzt, kommt die Variable a nicht mehr vor und er kann b berechnen.
Er setzt die Formel für a und die Länge der Diagonale für c in den Satz des Pythagoras ein, quadriert, bringt auf einen gemeinsamen Nenner und fasst zusammen:

$$\left(\frac{9}{16} b\right)^2 + b^2 = (117 \text{ cm})^2$$

$$\frac{81}{256} b^2 + b^2 = \frac{337}{256} b^2 = 13\,689 \text{ cm}^2$$

Nun löst er die Gleichung nach b auf. Dabei rundet er auf volle Zentimeter auf.

$$b^2 = \frac{13\,689 \text{ cm}^2 \cdot 256}{337} \approx 10\,399 \text{ cm}^2 \longrightarrow b \approx 102 \text{ cm}$$

Der Fernseher passt also nicht an die vorgesehene Wand und Paul muss sich einen anderen Platz suchen.

Wenn die Rechnungen so lang werden wie hier, ist es sinnvoller, sie auf Folie zu Hause vorzubereiten – beim Vortrag bist du vielleicht doch etwas aufgeregt und kannst dich leichter verhaspeln. Wenn du Rechnungen beim Vortrag an die Tafel schreiben möchtest, solltest du auf jeden Fall einen Spickzettel dabeihaben, auf dem du nachsehen kannst.

Fasse am Ende deines Referates noch einmal zusammen, wie die Formel des Pythagoras lautet und wo du sie überall angewendet hast.

Autorin: Dr. Wiebke Salzmann

Bibliographisches Institut GmbH
Mecklenburgische Straße 53, 14197 Berlin

ISBN des zugehörigen Buchs: 978-3-411-71045-4
www.duden.de