

Omas Grundstück hat 7 Ecken – wie viel ist es wert?

Dieses Thema eignet sich für ein Plakat: Kombiniere kurze Textabschnitte, in denen du die Geschichte erzählst, mit Kästen, in denen du die Abbildungen zeigst. Füge den Abbildungen Bildunterschriften zu, damit man sie auch ohne den Text versteht. Verbinde Texte und Kästen sinnvoll mit Pfeilen, um die Reihenfolge zu verdeutlichen.

► Das Thema – Flächenberechnung bei unregelmäßigen Figuren – ist sehr theoretisch und trocken. Bette es in eine Geschichte ein, damit es anschaulicher wird.

Hannes, Louis und Finn sind Cousins. Ihre Oma hat eine Weide für ihre Schafe. Sie will die Schafe abgeben und demjenigen, der sie übernimmt, die Weide schenken. Dafür soll er den anderen beiden je ein Drittel des Wertes der Weide auszahlen. Die Weide hat eine völlig unregelmäßige Form.

Omas Grundstück hat 7 Ecken – wie viel ist es wert?

Zunächst suchen die Cousins einen Plan von dem Grundstück, um zu sehen, wie es aussieht. Sie finden eine Zeichnung, auf der die Seitenlängen eingetragen sind.

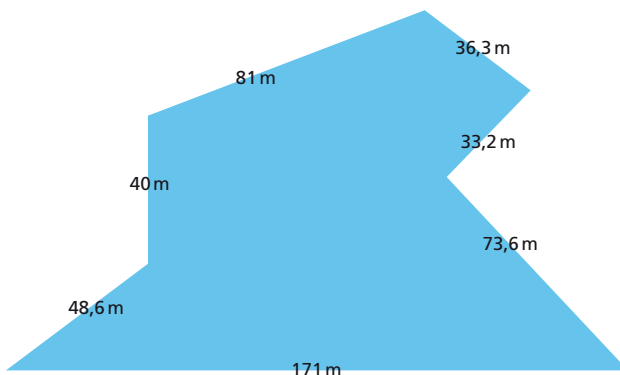
Dann überlegen sie, was sie wissen müssen, um ihr Problem zu lösen:

- Wie groß ist das Grundstück?
- Was kostet ein Quadratmeter?

Den Quadratmeterpreis von Weideland recherchiert Hannes im Internet. Sie einigen sich auf einen Preis von 1,20 € pro Quadratmeter.

Als Nächstes müssen sie den **Flächeninhalt** des Grundstücks berechnen. Sie stehen also vor dem Problem, ein völlig unregelmäßiges **Vieleck** berechnen zu müssen. **Regelmäßig** ist ein Vieleck nämlich nur dann, wenn alle Seiten gleich lang und alle Winkel gleich groß sind.

Die drei sind gut in Geometrie und kennen die gängigen Formeln für die Flächenberechnung. Leider sind das nur Formeln für Dreiecke und regelmäßige Vierecke.



► Ergänze diese Abbildung durch eine Bildunterschrift wie: „Form und Seitenlängen des Grundstücks“

Wie können sie sich bei unregelmäßigen Vielecken behelfen?

Eine Weile starren sie etwas ratlos auf den Grundstücksplan, bis Hannes auf die Idee kommt, das Grundstück zu zerteilen – und zwar so, dass die Teilflächen mit den bekannten Formeln berechnet werden können. Dann müssen sie nur die einzelnen Flächeninhalte addieren.

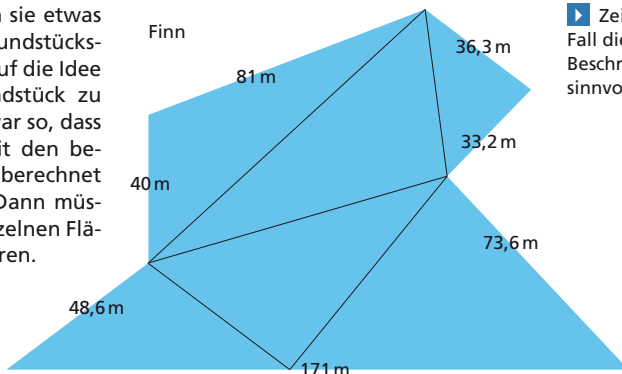
Sie machen sich an die Arbeit. Jeder zeichnet eine andere Zerlegung:

Finn unterteilt

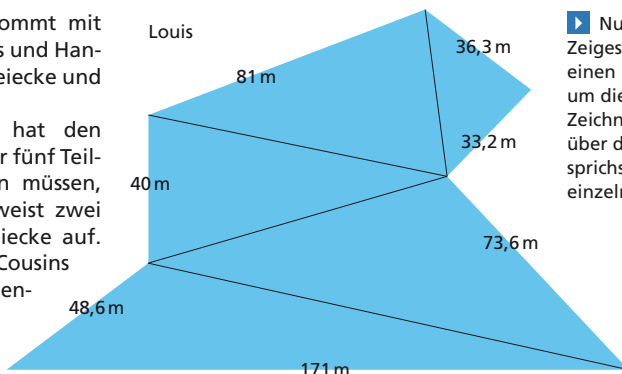
das 7-Eck in sechs Dreiecke, Louis kommt mit fünf Dreiecken aus und Hannes erhält fünf Dreiecke und ein Trapez.

Louis' Zerlegung hat den Vorteil, dass sie nur fünf Teilflächen berechnen müssen, die von Hannes weist zwei rechtwinklige Dreiecke auf. Dies macht den Cousins Hoffnung auf Rechen Vorteile. Für rechtwinklige Dreiecke gibt es ja ein paar zusätzliche Regeln und Sätze.

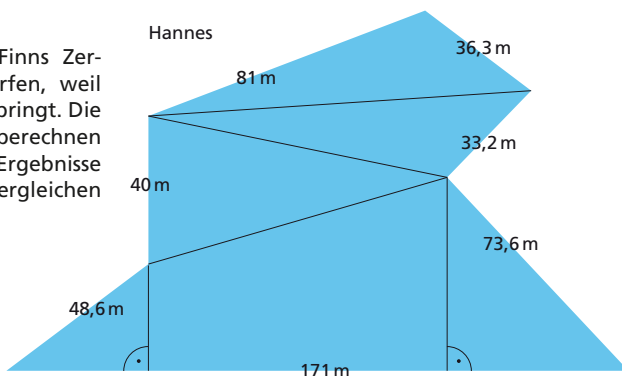
Sie beschließen, Finns Zerlegung zu verwerfen, weil sie keine Vorteile bringt. Die anderen beiden berechnen sie – damit sie die Ergebnisse zur Kontrolle vergleichen können.



► Zeige auf jeden Fall die Abbildungen. Beschrifte diese auch sinnvoll.



► Nutze einen Zeigestock oder einen Laserpointer, um die Details der Zeichnung zu zeigen, über die du gerade sprichst – bspw. die einzelnen Teilflächen.



Welche Formeln brauchen sie für die Teilflächen?

1) Für Louis' Zerlegung:

Hier gibt es nur Dreiecke. Die **Fläche eines Dreiecks** berechnet man mit:

$$A_D = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h.$$

Dabei ist g die **Grundseite** des Dreiecks und h die darauf stehende **Höhe**. Als Grundseite kann man jede Seite des Dreiecks wählen. Aber man muss unbedingt die dazugehörige Höhe verwenden.

Die drei müssen also zu jedem Teildreieck eine Seite, deren Länge sie kennen, wählen und auf dieser eine senkrechte Linie zeichnen, die durch die gegenüberliegende Ecke geht. Dies ist die gesuchte Höhe. Diese müssen sie ausmessen und können dann die Teilflächen berechnen. Die Höhe des Dreiecks A_2 liegt außerhalb des Dreiecks.

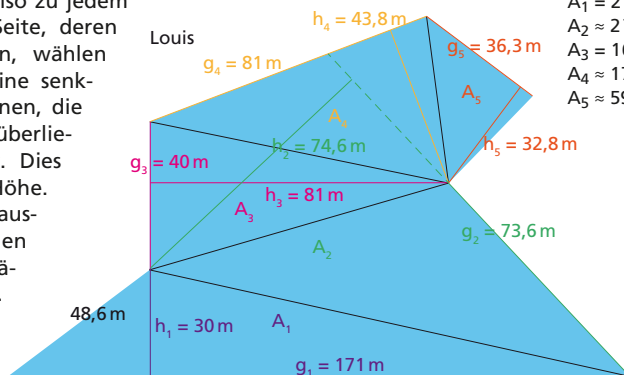
Sie erhalten für die Fläche des gesamten Grundstücks:

$$\begin{aligned} A &= A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 \\ &\approx 2565 \text{ m}^2 + 2745,3 \text{ m}^2 + 1620 \text{ m}^2 + 1773,9 \text{ m}^2 + 595,3 \text{ m}^2 \\ &\approx 9299,5 \text{ m}^2. \end{aligned}$$

► Schreibe die Formeln auf dein Plakat. Vergiss nicht die Erläuterungen der Symbole.

► Stelle auf deinem Plakat die Ergebnisse für die einzelnen Teilflächen dar:

$$\begin{aligned} A_1 &= 2565 \text{ m}^2 \\ A_2 &\approx 2745,3 \text{ m}^2 \\ A_3 &= 1620 \text{ m}^2 \\ A_4 &\approx 1773,9 \text{ m}^2 \\ A_5 &\approx 595,3 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

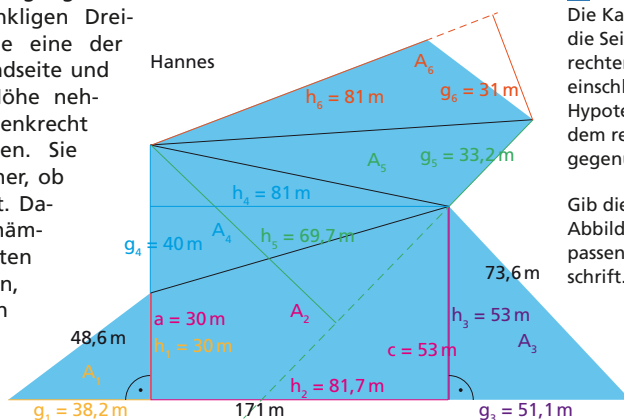


2) Für Hannes' Zerlegung:

Bei den rechtwinkligen Dreiecken können sie eine der **Katheten** als Grundseite und die andere als Höhe nehmen, weil beide senkrecht aufeinander stehen. Sie sind erst nicht sicher, ob dies ein Vorteil ist. Dadurch müssen sie nämlich beide benötigten Seiten ausmessen, denn sie kennen nur die Länge der **Hypotenuse**. Aber dann sehen sie, dass

► Zur Erinnerung: Die Katheten sind die Seiten, die den rechten Winkel einschließen, die Hypotenuse liegt dem rechten Winkel gegenüber.

Gib diesen beiden Abbildungen eine passende Bildunterschrift.



zwei der Katheten gleichzeitig die Grundseiten des Trapezes sind, die sie ja sowieso kennen müssen.

Die **Fläche A_T eines Trapezes** berechnet man mit:

$$A_T = \frac{a + c}{2} \cdot h.$$

a und c sind die beiden **Grundseiten** des Trapezes, das sind die beiden Seiten, die parallel zueinander sind. h_2 ist die **Höhe** des Trapezes.

Sie befassen sich zuerst mit dem ersten rechtwinkligen Dreieck, der Teilfläche A_1 , und messen die Kathete, die sie als Höhe nehmen wollen:

$$h_1 = 30 \text{ m.}$$

Die 2. Kathete können sie ebenfalls messen oder berechnen über den **Satz des Pythagoras**: $c^2 = a^2 + b^2$, wobei c die Hypotenuse ist und a und b die Katheten. Die Länge der 2. Kathete ist dann:

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{(48,6 \text{ m})^2 - (30 \text{ m})^2} \approx 38,2 \text{ m.}$$

Analog verfahren sie bei der Teilfläche A_3 , dem zweiten rechtwinkligen Dreieck:

$$h_3 = 53 \text{ m, } g_3 = 51,1 \text{ m.}$$

Damit haben sie auch die Grundseiten des Trapezes:

$$a = h_1 = 30 \text{ m,}$$

$$c = h_3 = 51,1 \text{ m.}$$

Die Höhe des Trapezes berechnen sie als Differenz der gesamten Seitenlänge und der beiden Grundseiten der rechtwinkligen Dreiecke:

$$h_2 = 171 \text{ m} - g_1 - g_2 = 171 \text{ m} - 38,2 \text{ m} - 51,1 \text{ m} = 81,7 \text{ m.}$$

Damit müssen sie nur noch die drei Dreiecke A_4 , A_5 , A_6 berechnen, bei denen sie genauso vorgehen wie in der Zerlegung von Louis.

Damit erhalten sie für die Gesamtfläche:

$$\begin{aligned} A &= A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 \\ &\approx 573 \text{ m}^2 + 3390,6 \text{ m}^2 + 1354,2 \text{ m}^2 + 1620 \text{ m}^2 + 1157,0 \text{ m}^2 \\ &\quad + 1255,5 \text{ m}^2 \\ &\approx 9350,3 \text{ m}^2. \end{aligned}$$

► Wichtige Rechenschritte stelle ebenfalls in einem Kasten auf deinem Plakat dar.

► Stelle auf deinem Plakat auch hier die Ergebnisse für die einzelnen Teilflächen dar:

$$\begin{aligned} A_1 &= 573 \text{ m}^2 \\ A_2 &\approx 3390,6 \text{ m}^2 \\ A_3 &\approx 1354,2 \text{ m}^2 \\ A_4 &= 1620 \text{ m}^2 \\ A_5 &\approx 1157,0 \text{ m}^2 \\ A_6 &\approx 1255,5 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

Warum bekommen sie nicht in beiden Fällen dasselbe heraus?

Dafür finden sie eine einfache Erklärung: Sie mussten ja die Höhen größtenteils als Senkrechte einzeichnen und die Längen ausmessen. Beim Zeichnen und Messen entstehen immer Ungenauigkeiten – die Senkrech-

► Stelle eine Liste der Fehlerquellen zusammen:

- Längenmessung
- Winkelbestimmung
- Rundungsfehler

ten stehen nicht exakt senkrecht und mit einem Lineal kann man nicht genauer als auf 0,5 mm messen. Zudem mussten sie bei der Rechnung auch runden, wodurch weitere Ungenauigkeiten hinzukamen.

► Frage dein Publikum zuerst nach dem Ergebnis.

Was ist das Grundstück denn nun wert?

Sie nehmen nun einfach den Mittelwert aus beiden Werten:

$$A = \frac{9299,5 + 9350,3}{2} \text{ m}^2 \approx 9324,9 \text{ m}^2$$

Damit ist das Grundstück ihrer Oma $9324,9 \cdot 1,20 \text{ €} = 11\,189,88 \text{ €}$ wert und derjenige, der die Schafe übernimmt, muss seinen Cousins jeweils 3729,96 € zahlen.

Autorin: Dr. Wiebke Salzmann

© Duden 2021
Bibliographisches Institut GmbH
Mecklenburgische Straße 53, 14197 Berlin

ISBN des zugehörigen Buchs: 978-3-411-71045-4
www.duden.de