Was tun, wenn die exakte Lösung einer Gleichung nicht möglich ist?

Dieses Thema eignet sich für einen Vortrag mit Präsentation, denn du musst Rechnungen und Diagramme zeigen. Diese bereitest du am besten auf Folien vor, die du als Präsentation zu deinem Vortrag nutzt.

Wenn man eine **Gleichung** hat, möchte man die **Unbekannte** oder die Unbekannten bestimmen. Wenn eine Gleichung mehrere Unbekannte oder **Variablen** hat, lassen sich diese nur bestimmen, wenn man ein Gleichungssystem hat, das so viele Gleichungen wie Variablen hat. In diesem Vortrag soll es jedoch um Gleichungen mit nur einer Unbekannten gehen.
Man bestimmt die Unbekannte, indem man die Gleichung nach ihr auflöst. Zum Beispiel:
$x^2 + 4 = -4x$ löst man mit der p-q-Formel und erhält: $x = 2$.
Der berechnete Wert für die Variable ist die **Lösung** der Gleichung.

Aber was tut man, wenn x in einer höheren Potenz in der Gleichung enthalten ist?

Beispielsweise tritt in der Gleichung:

$$x^3 - 2x^2 - 3x + 1 = 0$$

3 als höchste Potenz von x auf. Dies ist also eine Gleichung dritten Grades. Es gibt ein paar Tricks, um eine Gleichung dritten oder höheren Grades zu lösen. Wenn man bereits eine Lösung kennt, kann man die Methode der Polynomdivision anwenden und dadurch den Grad um 1 verringern. Kennt man aber noch keine Lösung, fällt diese Methode aus. Wenn man die Gleichung nicht auflösen und die Unbekannte demzufolge nicht exakt berechnen kann, muss man eine **Näherungsmethode** anwenden. Dann erhält man nur einen Näherungswert, kann diesen aber beliebig genau berechnen.
In diesem Vortrag soll die Methode der **Intervallschachtelung** vorgestellt werden.
Mit der Methode der Intervallschachtelung bestimmt man zunächst allerdings keine Lösungen von Gleichungen, sondern **Nullstellen** von Funktionen.

Achte beim Erstellen der Folien darauf, dass du sie nicht mit Gleichungen und Formeln überfrachtest. Deine Zuhörer haben sonst Probleme, alles zu erfassen. Stelle nur die wichtigsten Schritte dar.

Zur Erinnerung: Um die p-q-Formel anwenden zu können, muss die Gleichung in der Form stehen:

$x^2 + px + q = 0$

Die Lösungsformel ist:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = -\frac{4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 - 4}$$

Mache dich mit der Methode der Polynomdivision vertraut, falls Nachfragen kommen.

Was haben die Nullstellen einer Funktion mit der Lösung einer Gleichung zu tun?

Dieser Zusammenhang soll an der Beispielgleichung erklärt werden.
Man kann die linke Seite der Gleichung $x^3 - 2x^2 - 3x + 1 = 0$ als **Term** einer Funktion auffassen: $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 1$.
Diesen Funktionstyp mit nur natürlichen Zahlen als Exponenten der Variablen nennt man übrigens eine **rationale Funktion.**
In der Gleichung steht auf der rechten Seite 0, der Term wird also gleich 0 gesetzt.
Wenn ein Funktionsterm gleich 0 wird, bedeutet das, dass $f(x) = 0$ ist, dass also der Funktionswert 0 ist. Bei dem x-Wert, für den $f(x) = 0$ ist, schneidet der Graph der Funktion die x-Achse – der x-Wert ist eine **Nullstelle** der Funktion.
Die Nullstellen der Funktion $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 1$ sind also auch die Lösungen der Gleichung $x^3 - 2x^2 - 3x + 1 = 0$. Deshalb hilft die Methode der Nullstellenbestimmung durch Intervallschachtelung auch beim Lösen von Gleichungen weiter.
Fasst man die Gleichung als Funktionsterm auf, kann man erst einmal untersuchen, ob die Funktion überhaupt eine Nullstelle hat – anders ausgedrückt: ob die Gleichung überhaupt eine Lösung hat.

Wie untersucht man, ob die Funktion Nullstellen hat?

Wenn der Graph einer Funktion die x-Achse schneidet, heißt das, dass die Funktionswerte auf der einen Seite der Schnittstelle größer als 0 sind und auf der anderen Seite kleiner als 0. An der Nullstelle kommt es also zu einem **Vorzeichenwechsel.**
In dem Bereich, den die Wertetabelle zeigt, liegen sogar drei Vorzeichenwechsel, die Funktion hat hier also drei Nullstellen.
An sich sagt das noch nichts darüber aus, wie viele Nullstellen die Funktion insgesamt hat. Allerdings ist es so, dass eine rationale Funktion n-ten Grades nicht mehr als höchstens n Nullstellen hat. Eine Funktion 3. Grades kann daher nicht mehr als 3 Nullstellen haben.

x	f(x) = $x^3 - 2x^2 - 3x + 1$
–3	–35
–2	–9
–1	1
0	1
1	–3
2	–5
3	1
4	21

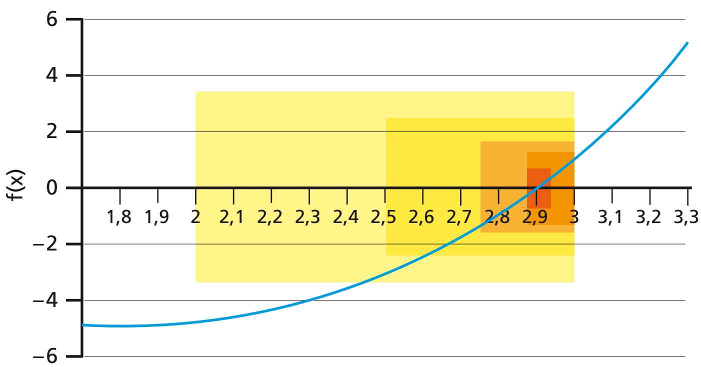
Zeige die Wertetabelle auf einer Folie und weise auf die Vorzeichenwechsel hin, indem du einen Zeigestock oder Laserpointer benutzt.

Wo kommen jetzt die Intervalle ins Spiel?

Man sieht an der Wertetabelle, dass bspw. zwischen $x = 2$ und $x = 3$ eine Nullstelle liegt, denn $f(2) = -5$ und $f(3) = +1$. Die Nullstelle liegt also im Intervall $[2; 3]$.

Natürlich möchte man etwas genauer wissen, wo die Nullstelle liegt. Dazu muss das Intervall eingegrenzt werden. Die Grenzen müssen also dichter an die Nullstelle herangeschoben werden. Aber es ist unbekannt, wo im Intervall die Nullstelle liegt. Man muss sich also herantasten und das geht am einfachsten mit der sogenannten **Intervallhalbierungsmethode.**
Wie der Name schon vermuten lässt, halbiert man dabei das Intervall einfach und erhält im Beispiel die beiden Intervalle: [2; 2,5] und [2,5; 3].
Als Nächstes berechnet man den Funktionswert für x = 2,5. Dazu setzt man 2,5 in die Funktion ein: f(2,5) ≈ –3,4. f(2,5) ist also kleiner als 0, damit muss der Vorzeichenwechsel und somit die Nullstelle im Intervall [2,5; 3] liegen.
Dieses Intervall halbiert man wieder in die Intervalle [2,5; 2,75] und [2,75; 3]. Wieder berechnet man den Funktionswert für x = 2,75 und erhält: f(2,75) ≈ –1,6, was wiederum kleiner als 0 ist. Die Nullstelle liegt also im Intervall [2,75; 3].
Auch dieses Intervall wird halbiert, das ergibt die Intervalle [2,75; 2,875] und [2,875; 3] und f(2,875) ≈ –0,4. Damit liegt die Nullstelle im Intervall [2,875; 3].
Wieder teilt man das Intervall in die Hälften [2,875; 2,9375] und [2,9375; 3].
Jetzt ist aber f(2,9375) ≈ 0,3, also größer als 0. Der Vorzeichenwechsel und damit die Nullstelle liegt also im Intervall [2,875; 2,9375]. Nun wird also dieses halbiert.
In der Grafik sind das erste Intervall und die ersten 4 Halbierungen dargestellt.
Nach 5 weiteren Intervallhalbierungen ist die Nullstelle eingegrenzt auf das Intervall [2,91015625; 2,9140625]. Die obere und die untere Intervallgrenze stimmen nun bis zur 2. Nachkommastelle überein. Diese Genauigkeit reicht, wenn man die Nullstelle auf 2 Nachkommastellen genau kennen will. Der Näherungswert für die Nullstelle ist dann x ≈ 2,91. Wenn das noch nicht ausreichend genau ist, muss man das Verfahren fortsetzen.

Bei sehr mathematischen Themen ist es oft schwer, Ideen für Grafiken zu entwickeln. Versuche es trotzdem, denn das lockert deine Präsentation auf. Bei der Grafik zur Intervallhalbierung erkennt dein Publikum schneller, worum es geht, als wenn es nur Zahlen sieht.



Zeige hier die Grafik und weise auf die Zahlen jeweils mit einem Zeigestock oder Laserpointer hin.

Im Folgenden wird das Verfahren noch einmal zusammengefasst:

Ausgehend von einem ersten Intervall, in dem ein Vorzeichenwechsel stattfindet, verkleinert man das Intervall durch ständige Halbierung. Bei der Halbierung wird der x-Wert in der Intervallmitte zur unteren bzw. oberen Grenze der beiden Teilintervalle.
Man berechnet dann den Funktionswert zu diesem mittleren x – diesen braucht man nicht sehr genau zu kennen, es kommt nur auf das Vorzeichen an. Man wählt das Teilintervall aus, in dem der Vorzeichenwechsel liegt, und halbiert dieses usw.
Ist die für die Nullstelle gewünschte Genauigkeit erreicht, hört man auf. Möchte man bspw. die Nullstelle auf 3 Nachkommastellen genau kennen, ist man fertig, wenn obere und untere Grenze des Intervalls bis zur 3. Nachkommastelle übereinstimmen.
Die Tabelle gibt noch einmal die Intervallhalbierung für das berechnete Beispiel bis zu einer Genauigkeit von 2 Nachkommastellen wieder.

Markiere die Nachkommastellen in den Intervallgrenzen, bis zu denen die Grenzen übereinstimmen, damit man dies auch erkennt.

untere Grenze	Intervallmitte	obere Grenze	f(x-Mitte)	Intervall mit Vorzeichenwechsel
2	2,5	3	–3,375	oberes
2,5	2,75	3	–1,578 125	oberes
2,75	2,875	3	–0,392 578 125	oberes
2,875	2,937 5	3	0,277 099 609 4	unteres
2,875	2,906 25	2,937 5	–0,064 300 537 1	oberes
2,906 25	2,921 875	2,937 5	0,104 747 772 2	unteres
2,906 25	2,914 062 5	2,921 875	0,019 812 107 1	unteres
2,906 25	2,910 156 25	2,914 062 5	–0,022 346 913 8	oberes
2,910 156 25	2,912 109 375	2,914 062 5	–0,001 293 100 4	oberes

Hat das Verfahren auch Nachteile?

Einer der Nachteile dürfte während des Vortrags schon deutlich geworden sein – es ist langwierig und umständlich. Deshalb ist es für Rechnungen mit Stift und Papier nicht sehr praktisch. Anders sieht es aus, wenn man einen Computer und ein entsprechendes Computerprogramm zur Verfügung hat, dann ist es eine häufig verwendete Methode.
Weitere Probleme ergeben sich beim Aufstellen der Wertetabelle – es kann passieren, dass die Wertetabelle zu grob ist und das Anfangsintervall mehrere Nullstellen enthält, ohne dass man von diesen weiß. Dann gibt es auch entsprechend viele Vorzeichenwechsel, von denen man nichts weiß. Deshalb gelingt es in solchen Fällen nicht, die Nullstelle durch die Intervallgrenzen einzugrenzen, da man mal auf den einen, mal auf den anderen Vorzeichenwechsel stößt.

Mit der hier dargestellten Vorgehensweise über den Vorzeichenwechsel kann man nur Nullstellen finden, in denen der Graph die x-Achse schneidet. Nullstellen, in denen er sie nur berührt, findet man so nicht, da diese keinen Vorzeichenwechsel zur Folge haben.

Gibt es einen praktischen Nutzen des Intervallhalbierungsverfahrens?

Da man über das Intervallhalbierungsverfahren nicht nur Vorzeichenwechsel finden kann, sondern auch andere besondere Stellen, lassen sich auch **Messwertreihen** damit analysieren. Als Beispiel seien hier digitale Niederschlagsmessungen vorgestellt. Wenn es regnet, füllt sich eine kleine Schale im Niederschlagsmesser mit Wasser. Ist sie voll, kippt sie nach unten und entleert sich. Eine Schale entspricht je nach Ausführung des Niederschlagsmessers 0,1 mm oder 0,2 mm Regen. Digitale Niederschlagsmesser in Wetterstationen zeichnen ununterbrochen auf. Solange es nicht regnet, erhält man also lange Datenreihen mit dem Messwert 0 mm. Möchte man nun nach einem Regenereignis wissen, wann genau dieses angefangen hat, kann man sich alle Daten durchlesen und die erste Entleerung der Schale von Hand suchen – oder man lässt den Computer mithilfe der Intervallhalbierungsmethode nach dem ersten Sprung von 0 mm auf 0,1 mm bzw. 0,2 mm suchen.

Versuche auch zu theoretischen Themen eine Anwendung zu finden – dabei hilft es, mit mehreren Bekannten oder Verwandten über dein Thema zu sprechen. Manchmal ergeben sich unerwartete Ideen dabei.

Regen wird in der Einheit Liter pro Quadratmeter oder in Millimetern angegeben. Der Zahlenwert ist in beiden Fällen derselbe: 1 mm = 1 l/m^2.

Abbildung: Pierluigi.Palazzi/Shutterstock.com 5

Autorin: Dr. Wiebke Salzmann

Bibliographisches Institut GmbH
Mecklenburgische Straße 53, 14197 Berlin

ISBN des zugehörigen Buchs: 978-3-411-71045-4
www.duden.de